

Zur einheitlichen Feldtheorie.

VON A. EINSTEIN.

In zwei jüngst erschienenen Abhandlungen¹ habe ich zu zeigen versucht, daß man zu einer einheitlichen Theorie der Gravitation und Elektrizität dadurch gelangen könne, daß man dem vierdimensionalen Kontinuum außer einer RIEMANN-Metrik noch den »Fernparallelismus« als Eigenschaft zuschreibt. In der Tat gelang es auch, dem Gravitationsfelde und dem elektromagnetischen Felde eine einheitliche Deutung zu geben. Dagegen führte die Ableitung der Feldgleichung aus dem HAMILTONSchen Prinzip auf keinen einfachen und völlig eindeutigen Weg. Diese Schwierigkeiten verdichteten sich bei genauerer Überlegung. Es gelang mir aber seitdem, einen befriedigenden Weg zur Ableitung der Feldgleichungen zu finden, den ich im folgenden mitteile.

§ 1. Formale Vorbereitungen.

Ich benutze die Bezeichnungen, welche neulich Hr. WEITZENBÖCK in seiner Arbeit über den Gegenstand vorgeschlagen hat². Die ν -Komponente des s -ten Beins des n -Beins wird also mit ${}^s h_\nu$ bezeichnet, mit ${}^s h_\nu$ die zugehörigen normierten Unterdeterminanten. Die lokalen n -Beine sind alle »parallel« gestellt. Parallele und gleiche Vektoren sind solche, welche — auf ihr lokales n -Bein bezogen — gleiche Koordinaten haben. Die Parallelverschiebung eines Vektors wird durch die Formel

$$\delta A^\alpha = -\Delta_{\alpha\beta}^\alpha A^\beta \delta x^\beta = -s h^\alpha {}^s h_{\alpha,\beta} A^\beta \delta x^\beta$$

gegeben, wobei in ${}^s h_{\alpha,\beta}$ das Komma andeuten soll, das nach x^β im gewöhnlichen Sinne differenziert werden soll. Der aus den (in α und β nicht symmetrischen) $\Delta_{\alpha\beta}^\alpha$ gebildete »RIEMANNsche Krümmungstensor« verschwindet identisch.

Als »kovariante Differentiation« verwenden wir nur jene, welche mittels der Δ gebildet ist. Sie sei nach der Gepflogenheit der italienischen Mathematiker durch ein Semikolon bezeichnet, also

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} &\equiv A_{\alpha,\beta} - A_\alpha \Delta_{\alpha\beta}^\alpha \\ A^{\alpha;\beta} &\equiv A^{\alpha,\beta} + A^\alpha \Delta_{\alpha\beta}^\alpha \end{aligned}$$

Da die ${}^s h_\nu$ sowie die $g_{\mu\nu}$ ($\equiv {}^s h_\mu {}^s h_\nu$) und die $g^{\mu\nu}$ verschwindende kovariante Ableitungen haben, können diese Größen als Faktoren mit dem kovarianten Differentiationszeichen beliebig vertauscht werden.

¹ Diese Berichte VIII. 28 und XVII. 28.

² Diese Berichte XXVI. 28.

Von der bisherigen Bezeichnungsweise weiche ich dadurch ab, daß ich den Tensor Λ (unter Weglassung des Faktors $\frac{1}{2}$) durch die Gleichung

$$\Lambda_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \Delta_{\mu\nu}^{\alpha} - \Delta_{\nu\mu}^{\alpha}$$

definiere.

Der Hauptunterschied gegen die geläufigen Formeln des absoluten Differentialkalküls, welchen die Einführung eines unsymmetrischen Verschiebungsgesetzes mit sich bringt, liegt in der Divergenzbildung. Es sei $T_{\dots}^{\dots\sigma}$ ein beliebiger Tensor mit dem oberen Index σ . Seine kovariante Ableitung lautet, wenn wir nur das auf den Index σ bezügliche Ergänzungsglied hinschreiben,

$$T_{\dots}^{\dots\sigma}{}_{;\tau} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}_{\dots}^{\dots\sigma}}{\partial x^{\tau}} + \dots + T_{\dots}^{\dots\alpha} \Delta_{\alpha\tau}^{\sigma}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit der Determinante h , nachdem man sie nach σ und τ verjüngt hat, so erhält man nach Einführung der Tensordichte \mathfrak{T} auf der rechten Seite

$$h T_{\dots}^{\dots\sigma}{}_{;\tau} \equiv \frac{\partial T_{\dots}^{\dots\sigma}}{\partial x^{\tau}} + \dots + \mathfrak{T}_{\dots}^{\dots\alpha} \Lambda_{\alpha\tau}^{\sigma}.$$

Das letzte Glied der rechten Seite fehlt, wenn das Verschiebungsgesetz symmetrisch ist. Es ist selbst eine Tensordichte, ebenso daher auch die übrigen Glieder der rechten Seite zusammen, welche wir in Übereinstimmung mit der üblichen Bezeichnungsweise als die Divergenz der Tensordichte \mathfrak{T} bezeichnen und

$$\mathfrak{T}_{\dots}^{\dots\sigma}{}_{;\tau}$$

schreiben wollen. Man erhält dann

$$h T_{\dots}^{\dots\sigma}{}_{;\tau} \equiv \mathfrak{T}_{\dots}^{\dots\sigma}{}_{;\tau} + \mathfrak{T}_{\dots}^{\dots\alpha} \Lambda_{\alpha\tau}^{\sigma}. \tag{1}$$

Endlich wollen wir noch eine Bezeichnung einführen, die — wie mir scheint — die Übersichtlichkeit erhöht. Ich will manchmal das Heraufziehen bzw. Hinunterziehen eines Index dadurch andeuten, daß ich den betreffenden Index unterstreiche. Ich bezeichne also z. B. mit $(\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma})$ dem zu $(\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma})$ gehörigen rein kontravarianten, mit $(\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma})$ den zu $(\Lambda_{\mu\nu}^{\sigma})$ gehörigen rein kovarianten Tensor.

§ 2. Ableitung einiger Identitäten.

Das Verschwinden der „Krümmung“ wird durch die Identität

$$0 \equiv -\Delta_{kl,m}^i + \Delta_{km,l}^i + \Delta_{\tau l}^i \Delta_{km}^{\sigma} - \Delta_{\sigma m}^i \Delta_{kl}^{\tau} \tag{2}$$

ausgedrückt. Diese Identität benutzen wir, um eine solche abzuleiten, welcher der Tensor Λ genügt. Man bilde die beiden Gleichungen, welche aus (1) durch zyklische Verschiebung der Indizes klm entstehen und addiere die drei Gleichungen. Dann erhält man durch passende Zusammenfassung unmittelbar die Identität

$$0 \equiv (\Lambda_{kl,m}^i + \Lambda_{lm,k}^i + \Lambda_{mk,l}^i) + (\Delta_{\tau k}^i \Lambda_{lm}^{\sigma} + \Delta_{\tau l}^i \Lambda_{mk}^{\sigma} + \Delta_{\tau m}^i \Lambda_{kl}^{\sigma}).$$

Diese Gleichung formen wir dadurch um, daß wir statt der gewöhnlichen Ableitungen des Λ die kovarianten Ableitungen einführen. So ergibt sich nach passender Zusammenfassung der Glieder mühelos die Identität

$$\circ \equiv (\Lambda_{kl; m}^i + \Lambda_{lm; k}^i + \Lambda_{mk; l}^i) + (\Lambda_{k\alpha}^i \Lambda_{lm}^\alpha + \Lambda_{l\alpha}^i \Lambda_{mk}^\alpha + \Lambda_{m\alpha}^i \Lambda_{kl}^\alpha) \quad (3)$$

Dies ist eben die Bedingung dafür, daß sich die Λ in der angegebenen Weise durch die h ausdrücken lassen.

Durch einmaliges Verjüngen von (3) erhält man, indem man für $\Lambda_{\mu\alpha}^\alpha$ der Kürze halber ϕ_μ setzt, die für das Folgende wichtige Identität

$$\circ \equiv \Lambda_{kl; \alpha}^\alpha + \phi_{l; k} - \phi_{k; l} - \phi_\alpha \Lambda_{kl}^\alpha. \quad (3a)$$

Diese formen wir noch um, indem wir die in k und l antisymmetrische Tensordichte

$$\mathfrak{B}_{kl}^\alpha = h(\Lambda_{kl}^\alpha + \phi_l \delta_k^\alpha - \phi_k \delta_l^\alpha) \quad (4)$$

einführen. (3a) geht dann in die einfache Form über

$$(\mathfrak{B}_{kl}^\alpha)_{|\alpha} \equiv \circ \quad (3b)$$

Die Tensordichte \mathfrak{B}_{kl}^α erfüllt noch eine zweite Identität, welche für das Folgende von Bedeutung ist. Wir stützen uns zu deren Ableitung auf folgendes Vertauschungsgesetz der Divergenzbildungen bei Tensordichten von beliebigem Range:

$$\mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot j|k} - \mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot k|j} \equiv -(\mathfrak{A}^{\cdot ik} \Lambda_{ik}^\sigma)_{|\sigma}. \quad (5)$$

Die Punkte bei \mathfrak{A} bedeuten beliebige Indizes, die in allen drei Gliedern der Gleichung dieselben sind, nämlich diejenigen, welche bei den Divergenzbildungen nicht betroffen werden.

Der Beweis von (5) stützt sich außer auf die Definitionsformel

$$\mathfrak{A}_{\tau \cdot \cdot \cdot j|}^\sigma = \mathfrak{A}_{\tau \cdot \cdot \cdot i}^\sigma + \mathfrak{A}_{\tau \cdot \cdot \cdot i}^\sigma \Delta_{\alpha i}^\sigma \cdot \cdot \cdot - \mathfrak{A}_{\alpha \cdot \cdot \cdot i}^\sigma \Delta_{\sigma i}^\sigma \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

insbesondere auf die Identität (2). Gleichung (5) hängt eng zusammen mit dem Vertauschungsgesetz der kovarianten Differentiation, das ich der Vollständigkeit halber ebenfalls angeben will. Sei T ein beliebiger Tensor, dessen Indizes ich der Bequemlichkeit halber weglasse, so gilt

$$T_{, i; k} - T_{, k; i} \equiv -T_{, \sigma} \Lambda_{ik}^\sigma. \quad (7)$$

Von der Identität (5) machen wir nun Anwendung auf die Tensordichte \mathfrak{B}_{kl}^α , deren untere Indizes wir heraufgezogen denken. Wir finden so als einzige nicht triviale Identität

$$\mathfrak{B}_{k\ell|\alpha}^\alpha - \mathfrak{B}_{\ell\alpha|k}^\alpha \equiv -(\mathfrak{B}_{kl}^\alpha \Lambda_{\alpha\sigma}^\sigma)_{|\sigma},$$

welche man mit Rücksicht auf (3b) auf die Form bringen kann

$$(\mathfrak{B}_{k\ell}^\alpha - \mathfrak{B}_{\ell k}^\alpha \Lambda_{\sigma\tau}^\sigma)_{|\alpha} \equiv \circ. \quad (8)$$

§ 3. Die Feldgleichungen.

Nachdem ich die Identität (3b) entdeckt hatte, war es mir klar, daß bei einer natürlichen einschränkenden Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit von der ins Auge gefaßten Art die Tensordichte \mathfrak{B}_{kl}^α eine wichtige Rolle spielen müsse. Da deren Divergenz $\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha$ identisch verschwindet, war es der nächstliegende Gedanke, die Forderung aufzustellen (Feldgleichungen), daß auch die andere Divergenz $\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha$ verschwinden solle. So gelangt man in der Tat zu Gleichungen, die in erster Näherung das bekannte Vakuumfeldgesetz der Gravitation liefern, wie es aus der bisherigen allgemeinen Relativitätstheorie bekannt ist.

Dagegen ergab sich so keine Vektorbedingung für die ϕ_α , derart, daß alle ϕ_α mit verschwindender Divergenz mit jenen Feldgleichungen vereinbar waren. Dies beruht darauf, daß in erster Näherung (wegen Vertauschbarkeit des gewöhnlichen Differenzierens) die Identität

$$\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha \equiv \mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha$$

besteht, die Größe auf der rechten Seite aber wegen (3b) identisch verschwindet. Dadurch entfallen nämlich 4 Gleichungen des Systems $\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha = 0$.

Ich erkannte aber, daß diesem Mangel leicht abgeholfen werden konnte, indem man statt des Verschwindens von $\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha$ die Gleichung

$$\bar{\mathfrak{B}}_{k|\eta}^\alpha = 0$$

postuliert, in welcher $\bar{\mathfrak{B}}_{kl}^\alpha$ den von \mathfrak{B}_{kl}^α beliebig wenig abweichenden Tensor

$$\bar{\mathfrak{B}}_{kl}^\alpha = \mathfrak{B}_{kl}^\alpha - \varepsilon h(\phi_l \delta_k^\alpha - \phi_k \delta_l^\alpha) \quad (9)$$

bedeutet¹. Dann erhält man nämlich gerade die MAXWELLSCHEN Gleichungen (alles in erster Näherung), wenn man die Divergenz der Feldgleichungen (nach dem Index α) bildet. Daneben erhält man — indem man zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht — nach wie vor die Gleichungen $\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha = 0$, welche eben in erster Näherung das richtige Gravitationsgesetz liefern.

Die Feldgleichungen der Elektrizität und Gravitation werden also in erster Näherung durch den Ansatz

$$\bar{\mathfrak{B}}_{k|\eta}^\alpha = 0$$

richtig geliefert mit der zuzüglichen Bedingung, daß zum Limes $\varepsilon = 0$ überzugehen ist. Dabei bringt es das Bestehen der (in erster Näherung gültigen) Identität

$$\mathfrak{B}_{k|\eta}^\alpha \equiv 0 \quad (8a)$$

mit sich, daß in den Feldgleichungen der ersten Näherung eine Scheidung der Gesetze für Gravitation einerseits, Elektrizität andererseits auftritt, welche Trennung ja einen so charakteristischen Zug der Natur darstellt.

¹ Es ist dies ja die Methode, die immer angewendet wird, um in singulären Fällen auftretende Degenerationen aufzuheben.

Es galt nun, jene an der ersten Näherung gewonnene Erkenntnis für die strenge Betrachtung nutzbar zu machen. Es ist klar, daß wir auch hier von einer Identität auszugehen haben, welche (8a) entspricht. Dies ist offenbar die Identität (8), zumal beide Identitäten außer auf (3b) auf einem Vertauschungssatz der Differentiationsoperationen beruhen.

Wir haben also als Feldgleichungen

$$\overline{\mathfrak{B}}_{k\mu}^{\alpha} - \overline{\mathfrak{B}}_{k\tau}^{\tau} \Lambda_{\tau}^{\alpha} = 0 \quad (10)$$

anzusetzen, mit der Vorschrift, nachträglich (d. h. nach Vornahme der Operation »/α«) zu $\varepsilon = 0$ überzugehen. Man erhält so, wenn man die linke Seite von (10) mit $\mathfrak{G}^{k\alpha}$ bezeichnet, die Feldgleichungen

$$\mathfrak{G}^{k\alpha} = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathfrak{G}}^{k\mu} = 0. \quad (10b)$$

(10b) liefert mit Rücksicht auf (8) und (9) zunächst

$$\{[h(\phi_k \delta_i^{\alpha} - \phi_j \delta_k^{\alpha})]_{\mu} - h(\phi_k \delta_{\tau}^{\tau} - \phi_{\cdot} \delta_k^{\tau}) \Lambda_{\tau}^{\alpha}\}_{\mu} = 0.$$

Wir führen nun vorübergehend zur Abkürzung die Tensordichte

$$\mathfrak{W}_{ki}^{\alpha} = h(\phi_k \delta_i^{\alpha} - \phi_i \delta_k^{\alpha})$$

ein. Gemäß (5) ist

$$\overline{\mathfrak{W}}_{k\mu}^{\alpha} = \mathfrak{W}_{k\mu}^{\alpha} - (\mathfrak{W}_{ki}^{\alpha} \Lambda_i^{\tau})_{\mu},$$

so daß die auszurechnende Gleichung auch in der Form

$$(\overline{\mathfrak{W}}_{k\mu}^{\alpha} - \mathfrak{W}_{ki}^{\tau} \Lambda_i^{\alpha} - \mathfrak{W}_{k\tau}^{\tau} \Lambda_{\tau}^{\alpha})_{\mu} = 0$$

geschrieben werden kann, in welcher Gleichung sich die beiden letzten Glieder wegheben. Durch unmittelbare Ausrechnung ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{W}}_{k\mu}^{\alpha} \equiv h(\phi_{k;\alpha} - \phi_{\alpha;k}).$$

Die umgeformten Gleichungen (10b) lauten also

$$[h(\phi_{k;\alpha} - \phi_{\alpha;k})]_{\mu} = 0, \quad (11)$$

welches Gleichungssystem zusammen mit

$$\overline{\mathfrak{B}}_{k\mu}^{\alpha} - \overline{\mathfrak{B}}_{k\tau}^{\tau} \Lambda_{\tau}^{\alpha} = 0 \quad (10a)$$

das vollständige System der Feldgleichungen bildet.

Wären wir statt von (10) direkt von (10a) ausgegangen, so hätten wir die »elektromagnetischen« Gleichungen (11) nicht erhalten. Auch würden wir keinen Anhaltspunkt dafür haben, daß die Systeme (11) und (10a) miteinander vereinbar sind. So aber scheint es sicher zu sein, daß diese Gleichungen miteinander verträglich sind, da die ursprünglichen Gleichungen (10) sechzehn Bedingungen für die sechzehn Größen ${}^{\alpha}h_{\mu}$ sind. Zwischen diesen sechzehn Gleichungen (10) bestehen notwendig 4 Identitäten wegen der allgemeinen Kovarianz dieser Gleichungen. Zwischen den 20 Feldgleichungen (11), (10a) bestehen also im ganzen 8 identische Relationen, von denen im Text allerdings nur 4 explizite angegeben sind.

Daß die Gleichungen (10a) in erster Näherung die Gravitationsgleichungen enthalten, die Gleichungen (11) (in Verbindung mit der Existenz eines Potentialvektors) die MAXWELLSchen Gleichungen für das Vakuum, ist schon gesagt worden. Ich habe auch zeigen können, daß umgekehrt zu jeder Lösung dieser Gleichungen ein den Gleichungen (10a) genügendes h -Feld existiert¹. Durch Verjüngung der Gleichungen (10a) erhält man eine Divergenzbedingung für das elektrische Potential

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}'_{\mu} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}'_{\tilde{x}} \Lambda^k_{\sigma\tau} &= 0 \\ (2\tilde{f}' = \mathfrak{B}'_{\alpha\beta} = 2h\phi') \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Eine tiefere Untersuchung der Konsequenzen der Feldgleichungen (11), (10a) wird zu zeigen haben, ob die RIEMANN-Metrik in Verbindung mit dem Fernparallelismus wirklich eine adäquate Auffassung der physikalischen Qualitäten des Raumes liefert. Nach dieser Untersuchung ist es nicht unwahrscheinlich.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Dr. H. Müntz für die mühsame strenge Berechnung des zentralsymmetrischen Problems auf Grund des HAMILTONSchen Prinzips zu danken; durch die Ergebnisse jener Untersuchung wurde mir die Auffindung des hier beschrittenen Weges nahegebracht. Ebenso danke ich an dieser Stelle dem »Physikalischen Fond«, welcher mir es während der letzten Jahre ermöglicht hat, einen Forschungsassistenten in der Person des Hrn. Dr. GROMMER anzustellen.

Nachtrag zur Korrektur. Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Feldgleichungen sind formal gegenüber sonst denkbaren so zu kennzeichnen. Es ist durch Anlehnung an die Identität (8) erreicht worden, daß die (16) Größen h , nicht nur 16, sondern 20 selbständigen Differentialgleichungen unterworfen werden können. Unter »selbständig« ist dabei verstanden, daß keine dieser Gleichungen aus den übrigen gefolgert werden kann, wenn auch zwischen ihnen 8 identische (Differentiations-) Relationen bestehen.

¹ Dies alles nur, soweit es sich um die linearen Gleichungen der ersten Approximation handelt.